BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT

□ □ VOOR WISKUNDE □ □

GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

1e JAARGANG 1924/25, Nr. 1

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 3.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 2.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Saxen-Weimarlaan 46; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Saxen-Weimarlaan 48".

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

MOET HET MEETKUNDE-ONDERWIJS GEWIJZIGD WORDEN?

Opmerkingen naar aanleiding van een brochure van Mevrouw EHRENFEST—AFANASSJEEWA,

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

> Ich möchte gern widersprechen; nicht, um mit Ihnen zu disputieren; auch nicht etwa, um Sie zu überzeugen; sondern nur, um Ihnen den Glauben zu nehmen, ich sei der gleichen Meinung wie Sie.
>
> (G. Hermann, Die Nacht des Dr. Herzfeld, Berlin 1918, S. 72.)

Mevrouw T. Ehrenfest—Afanassjeewa, die reeds vaker blijk gaf van hare aandacht voor de methodologische problemen, die het meetkunde-onderwijs op scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs doet rijzen, heeft in een recente verhandeling [1]) eenige beschouwingen ontwikkeld over de rol, die de intuïtie haars inziens bij dat onderwijs behoort te spelen, waarvan het niet onwaarschijnlijk is, dat ze, niet het minst om de daarin tot uiting komende kritische stemming tegen de schijnbaar zoo onaantastbare, immers door eeuwenlange traditie geschraagde gangbare methode, in ruimen kring belangstelling zullen hebben gewekt. Verdiend hebben ze die belangstelling zeer zeker: de wiskunde speelt nu eenmaal in alle thans bestaande schooltypen zulk een groote rol, ze vereischt daarbij, vooral van hen, die geen bijzonderen mathematischen aanleg hebben, zooveel energie en ze verschaft zooveel teleurstelling aan wie die energie niet

---

1) Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven? door T. Ehrenfest—Afanassjeewa. Bij J. B. Wolters' U. M. Groningen, Den Haag, 1924.

in voldoende intensiteit weten te ontwikkelen, dat iedere ernstige bespreking van de vraag, of het nuttig effect van het wiskunde-onderwijs wel opweegt tegen al de moeite, die daaraan, zoowel van de zijde van den leerling als van die van den leeraar, moet worden besteed, nauwgezette overweging verdient. Juist om deze reden echter meent schrijver dezes, die zich door het geschrift van Mevrouw Ehrenfest menigmaal in zijn meest fundamenteele mathematische overtuigingen voelt aangetast, ook zijnerzijds eenige aandacht te mogen vragen voor een kritische bespreking der door haar ontwikkelde denkbeelden. Daartoe moge hier eerst getracht worden, in een korte samenvatting de hoofdlijnen van het betoog van Mevrouw Ehrenfest weer te geven.

Ter beantwoording van de vraag, of het waar is, dat het onderwijs in de Meetkunde de ontwikkeling van de logica kan bevorderen, onderzoekt de schrijfster vooreerst de beteekenis van de begrippen *logica* en *intuïtie.* Zij definieert daarbij de *intuïtieve werkzaamheid* bij ieder verwerven van inzicht als: het ontwaren van een zekeren trek in het beeld, dat we in ons hoofd hebben, zonder dat we ons rekenschap daarvan geven, en ook het ordenen van zulke trekken zonder bewustwording, terwijl zij het hiervan al dan niet in den tijd gescheiden *zich bewustworden* van de trekken van het intuïtieve beeld, het vaststellen en ordenen daarvan, het ontdekken van gapingen en tegenstrijdigheden, als het *logische werk* aanduidt.

De essentieele conclusie uit deze opvatting is, *dat de logische actie zonder de intuïtieve onmogelijk is*, dat zonder intuïtie geen denken kan bestaan. De schrijfster meent, dat hierop gewoonlijk niet gewezen wordt en ze legt op dit uitgangspunt voor haar verdere beschouwingen sterken nadruk. Het woord „denken" reserveert zij daarbij voor de boven bedoelde bewerking van het intuïtieve materiaal door het bewustzijn, terwijl ze de nadere beschouwing van de formeel logische betrekkingen tusschen de stellingen, waarmee het eenmaal begrepen voorwerp beschreven wordt, als „rekenen" van „denken" onderscheidt.

Op grond van de aldus ingevoerde terminologie beantwoordt zij de gestelde vraag: *kan het Meetkunde-onderwijs de ontwikkeling van de logica bevorderen?* bevestigend, op voorwaarde, dat er zorg gedragen worde, dat de leerling een voldoenden voorraad

van intuïtie bezit en de belangstelling, om deze te analyseeren. Juist deze voorwaarde echter vindt zij bij de gebruikelijke methode van onderwijs niet vervuld: als oorzaken van belemmering constateert zij de bij sommige leeraren voorkomende meening, dat het inzicht in de ruimtelijke betrekkingen synthetisch zou kunnen worden gevormd met behulp van de stellingen der Meetkunde, dat dus deze stellingen iets anders zouden kunnen zijn dan het uittreksel, ontstaan bij het analyseeren der reeds van te voren aanwezige intuïtie, daarnaast de door anderen gekoesterde overtuiging, dat iedere leerling al vanzelf deze intuïtie bezit, terwijl zij bovendien nog, ook voor leerlingen met een goed voorstellingsvermogen, verschillende oorzaken vindt, die aan de ontvankelijkheid voor logische strengheid afbreuk kunnen doen. Als zoodanig noemt zij:

1. De vermenging van twee verschillende wetenschappen, Ruimteleer en Axiomatica, in wat men gewoonlijk Meetkunde noemt, waarvan men echter de eerste moet hebben leeren kennen, om voor de tweede belangstelling te kunnen hebben.

2. De gewoonte, om bij het onderwijs de z.g. *methode van volharding* toe te passen, die gunstige resultaten verwacht van het inprenten der in correcten vorm geformuleerde uitkomsten van het denken van anderen, inplaats van eigen werkzaamheid der leerlingen te bevorderen en zoodoende de behoefte aan logisch denken eerst te ontwikkelen.

3. De overlading van den cursus, veroorzaakt door het inruimen van een te groote plaats aan afgeleide stellingen en toepassingen naast de fundamenteele stellingen van het op te bouwen systeem.

Als middel om deze ongewenschte toestanden te vermijden en het doel van het meetkunde-onderwijs beter te bereiken, stelt de schrijfster ten slotte voor, om aan den systematischen cursus een propaedeutischen cursus te doen vooraf gaan, waarin geen stellingen zullen worden bewezen, maar waarin het ruimtelijk voorstellingsvermogen door geschikte oefeningen (waarvoor nader te bespreken voorbeelden worden aangevoerd) zal worden ontwikkeld. Er zullen zich hierbij verschillende vragen voordoen, die vanzelf er toe zullen voeren, een begin met den systematischen cursus te maken. In dezen cursus zullen echter aanvankelijk stellingen slechts dan bewezen worden, indien ze voor ten minste

één leerling uit de klasse niet evident zijn; het vaststellen, formuleeren en bewijzen der stellingen zal geschieden onder verregaande medewerking der leerlingen; de omvang der te behandelen stof zal zoo beknopt mogelijk zijn. Ten slotte zal een *axiomatische* herziening het geleerde samenvatten, waarbij vele der „voorloopige axioma's" (dat zijn de aanvankelijk zonder bewijs aangenomen stellingen) zullen worden „bewezen". [1])

Wanneer ik, om mij een oordeel te vormen over de boven kort samengevatte beschouwingen, vooreerst de denkbeelden van de schrijfster over de begrippen intuïtie en logica in het oog vat, dan treft mij daarin, bij letterlijke opvatting van wat er geschreven staat, een onzuiverheid, die wellicht meer in de woorden, dan in de begrippen ligt, maar waarover ik, ter verheldering van de situatie, iets moet zeggen; ik bedoel de tegenstelling van het intuïtieve deel van het procédé van „inzien" als het onbewuste tot het logische deel als het bewuste. Hoe men ook het woord intuïtief wil opvatten, steeds zal men toch wel van een intuïtief inzicht, een intuïtief gevoel of een intuïtieve handeling spreken, wanneer men zich niet bewust is van de wijze, waarop dit inzicht tot stand is gekomen, van de gronden, waarop het gevoel berust en van de motieven, die tot de handeling aanleiding gaven, maar daarom zijn toch dat inzicht, dat gevoel en die handeling zelf niet onbewust. Ik meen uit het verdere verloop van het betoog der schrijfster wel te mogen opmaken, dat het hare bedoeling ook niet is, dit te beweren. In de ruimteleer staat namelijk intuïtie voor haar gelijk met ruimtelijk voorstellingsvermogen en daar ze toch wel niet zal kunnen zeggen, dat ze zich niet bewust is van wat ze zich voorstelt, lijkt het beter, om in haar gedachtengang de intuïtieve werkzaamheid te definieeren als het ontwaren van iets, zonder dat men zich rekenschap kan geven van het ontstaan der voorstelling of van het inzicht, of van de relaties daarvan met andere voorstellingen of inzichten, inplaats van het ontwaren zelf on-

[1]) Ik hoop, door het bovenstaande er in geslaagd te zijn, de hoofdlijnen van het betoog van Mevr. Ehrenfest voldoende aan te geven. Den belangstellenden lezer moge hier echter de bestudeering der brochure zelve nadrukkelijk worden aangeraden.

bewust te noemen. Het lijkt mij geoorloofd, deze correctie in de uitdrukkingswijze aan te brengen, omdat eerst hierdoor de algemeene definitie klopt met de later volgende concrete toepassingen.

De aldus opgevatte beschouwing nu, waarin dus intuïtie het niet nader te analyseeren vermogen is tot het zien van een geestesbeeld, dat niet alleen van iedere groote ontdekking het voornaamste bestanddeel oplevert, maar dat aan alle werkzaamheid van het intellect eerst den eigenlijken vruchtbaren inhoud verschaft, terwijl de logica achteraf de op oncontroleerbare wijze gedane vondst voor het verstand moet rechtvaardigen, het inzicht in een vorm moet kleeden, waarin er gelegenheid bestaat tot mededeeling aan anderen, zonder echter zelf scheppend te kunnen werken (zóó hoop ik althans Mevrouw Ehrenfest juist te begrijpen) heeft mij reeds bij eerste lezing zeer vertrouwd in de ooren geklonken en het doet vreemd aan, bij de schrijfster hier de overtuiging van een zekere mate van originaliteit aan te treffen. Wanneer men namelijk *intuïtie* door *Anschauung* en *logica* in de opvatting van de schrijfster door *Urtheilskraft* vertaalt, is het moeilijk om in haar betoog niet de grimmige stem te hooren weerklinken van Arthur Schopenhauer, waarmee deze in het eerste boek van *Die Welt als Wille und Vorstellung* [1]) en in het vijfde en zesde hoofdstuk van de verhandeling *Ueber die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde* [2]) betoogt, dat Anschauung de bron is van alle waarheid en de grondslag van alle wetenschap [3]), waar hij *Urtheilskraft* definieert als het vermogen, *das anschaulich Erkannte richtig und genau ins abstrakte Bewusstsein zu übertragen* en waar hij ieder, die slechts *gesunde Vernunft* heeft, in staat acht, *Sätze aus Sätzen zu folgern, zu beweisen, zu schliessen* [4]), kortom te „rekenen", in de terminologie van Mevrouw Ehrenfest.

Men zie in deze opmerkingen het tegendeel van een onvriendelijke insinuatie: *Alles Gescheite ist schon einmal gedacht worden; man muss nur versuchen, es noch einmal zu denken.* Mevrouw Ehrenfest zal zich ongetwijfeld op grond van dit woord

---

[1]) Schopenhauer's Sämmtliche Werke in fünf Bänden. Grossherzog Wilhelm Ernst Ausgabe. Inselverlag, Leipzig; zonder jaartal. Band I.

[2]) Ed. cit. Band III, 1—180.

[3]) *Die Welt als Wille und Vorstellung.* Erstes Buch, Cap. 14. Ed. cit. I, 109.

[4]) loc. cit. 110.

van Goethe eerder verheugen over de ontdekking van een zoo machtigen en haar blijkbaar onbekenden medestander in haar streven, dan dat ze hem het *Pereant, qui ante nos nostra dixerunt* toe zal slingeren.

In ieder geval is bij mogelijk verschil in de details der uitwerking het gemeenschappelijk grondbeginsel in beider gedachtengang onmiskenbaar en het is wel niet anders mogelijk, of de schrijfster zal zich veel van het felle betoog van den philosoof[1]) tegen de *glänzende Verkehrtheit* van de methode van Euclides uit het hart gegrepen voelen en instemmen met zijn klacht, dat een echt Euclidisch bewijs volstaat met het leveren van een *Erkenntnisgrund*, waaruit slechts het weten, *dat* het zoo is, voortvloeit (of liever de onmogelijkheid, om het te ontkennen), terwijl een *Seynsgrund*, welks evidentie en geldigheid even groot en onmiddellijk zijn als die der logische zekerheid, met het *dat* ook het *waarom*, het inzicht zou doen leeren kennen en daardoor eerst ware bevrediging en grondige kennis zou verschaffen.

Verschil tusschen beider opvatting ontstaat eigenlijk eerst, wanneer het om de Axiomatica gaat. Voor Schopenhauer is het logische bewijzen in de meetkunde principiëel volkomen overbodig: *Beweise sind überhaupt weniger für die, welche lernen, als für die, welche disputieren wollen*[2]). Hij is overtuigd, dat een analyse van den gedachtengang bij het eerste vinden van een geometrische waarheid bij elke, zij het ook nog zoo gecompliceerde stelling, de *aanschouwelijke* noodzakelijkheid zou moeten kunnen doen inzien. Voor Mevrouw Ehrenfest daarentegen is de Axiomatica een wezenlijk bestanddeel der Meetkunde als wetenschap en een onontbeerlijk hulpmiddel bij het onderwijs, omdat zij het van groote *practische* beteekenis acht, dat iemand zich niet alleen voor de juistheid van zijn opvattingen, maar ook voor den oorsprong en de logische reden daarvan interesseert.

Dit verschil in standpunt hangt echter, naar het mij voorkomt, samen met de na Schopenhauer's tijd ontstane moderne mathematische opvattingen over axiomatica; tot volledig begrip van de denkbeelden der schrijfster zal het wenschelijk zijn, ook hierop een oogenblik in te gaan. Ik voer daarbij een onderscheiding in,

---

[1]) Op. cit. Cap. 15. I, 115 seq.

[2]) Op. cit. Cap. 14. I, 114.

die mij bij de beschouwing van de ontwikkeling der mathematisch-physische wetenschappen verhelderend lijkt te werken, de onderscheiding namelijk van een *axiomatica a priori* en een *axiomatica a posteriori* [1]). Ik versta daarbij onder een axiomatica a priori het met logische bewijzen synthetisch opbouwen van een wetenschap op min of meer uitdrukkelijk geformuleerde fundamenteele beweringen, welke door ieder, die hare beteekenis begrijpt, als evident worden toegegeven, onder een axiomatica a posteriori echter het onderzoek naar de vraag, welke de volledige logische grondslagen zijn van een reeds, hetzij aprioristisch-axiomatisch, hetzij intuïtief gebouwd systeem. De elementaire meetkunde levert voor beide een voorbeeld: haar opbouw op de *αἰτήματα* van Euclides, zooals ze in het elementaire onderwijs voltrokken wordt, is axiomatisch a priori, haar her-opbouw op de axioma's, die b.v. Hilbert in zijn *Grundlagen der Geometrie* [2]) opstelt, is daarentegen a posteriori. Zoo kan men ook met eenig voorbehoud de fundeering der klassieke mechanica in Newton's *Principia* als a posteriori onderscheiden van de overwegend aprioristisch-axiomatische ontwikkeling bij de mechanici na Galilei.

Het zal waarschijnlijk niet noodig zijn, dieper op de gemaakte onderscheiding in te gaan; slechts moge er nog op gewezen worden, dat met deze onderscheiding een principiëel verschil in eischen, aan de axioma's te stellen, samenhangt. In een axiomatica a priori behoeven de axioma's slechts intuïtief duidelijk te zijn, zooals dan ook de postulaten van Euclides, dat der parallelen incluis, voor het mathematisch ongeschoolde denken zijn; in een axiomatica a posteriori echter moeten ze logisch niet tegenstrijdig en onafhankelijk zijn en bovendien praesteeren, wat er van verlangd wordt, namelijk de stellingen der te axiomatiseeren wetenschap werkelijk als logische conclusies opleveren; zelf kunnen ze daarbij alle aanschouwelijkheid ontberen; ja ze moeten zelfs daarvan verstoken blijven, wanneer, zooals bij Hilbert, slechts de constructie van een systeem van woorden en relaties tusschen

---

[1]) Ik neem hier de uitdrukkingen *a priori* en *a posteriori* in hare letterlijke, niet in hare epistemologische beteekenis.

[2]) *Grundlagen der Geometrie* von Dr. David Hilbert. Vierte Auflage. Leipzig und Berlin 1913. Wissenschaft und Hypothese. Band VII.

die woorden verlangd wordt, dat met de begrippen en stellingen der oorspronkelijke Euclidische Meetkunde *woordelijk* overeenstemt.

Het lijkt mij nu een zwak punt in het betoog van Mevrouw Ehrenfest, dat zij stilzwijgend schijnt aan te nemen, dat alle axiomatica (dit woord nu opgevat als: logisch uit grondstellingen bewijzende wetenschap) a posteriori is. Dat zij dit doet, blijkt overal uit de wijze, waarop zij tusschen Ruimteleer en Axiomatica onderscheidt: „het intuïtieve materiaal der Axiomatica zijn al de stellingen die voor ons de Ruimteleer vormen"; „het is onmogelijk, belangstelling te hebben voor het standpunt der Axiomatica, voordat men het stelsel der stellingen, die geaxiomatiseerd moeten worden, d. w. z. de Ruimteleer, heeft leeren kennen."

Deze opvatting lijkt mij echter essentieel onjuist: de axioma's der Euclidische meetkunde ontleenen hunne fundamenteele beteekenis voor den leerling niet aan het feit, dat de stellingen der Ruimteleer er formeel logisch uit kunnen worden afgeleid en het is in het geheel niet noodig, dat men hem hunne logische onafhankelijkheid of niet-strijdigheid aantoont; het zijn voor hem geen later ondergeschoven fundamenten van langs anderen weg verkregen kennis; ze hebben integendeel voor hem een volkomen overtuigende intuïtieve beteekenis en een vastere basis voor den opbouw van zijn weten kan hij zich niet denken, omdat hij aan hun waarheid niet alleen niet twijfelt, maar zelfs niet twijfelen kan.

Indien deze opmerking juist is, vervalt echter ook alle noodzaak, om de Ruimteleer aan de Axiomatica te doen voorafgaan, ja zelfs om in de elementaire meetkunde tusschen Ruimteleer en Axiomatica te onderscheiden. De klassieke Euclidische meetkunde heeft dan ook, voorzoover mij bekend is, dit onderscheid, dat Mevrouw Ehrenfest als de bekendste zaak der wereld vermeldt, nooit gemaakt en wanneer de schrijfster met een eenigszins naïeve verbazing constateert, dat er sommige leeraren zijn, die gelooven, dat het inzicht in de ruimtelijke betrekkingen synthetisch met behulp van de stellingen der Meetkunde gevormd wordt, dan vergeet zij, dat die sommigen (het zullen er meer zijn, dan zij denkt!) eenvoudig de saeculaire traditie van hun wetenschap volgen en dat hun meening althans een vrij hechten historischen grond heeft. Het is dezelfde traditie, die hen er van zal weer-

houden, om, zooals de schrijfster wil, naast het logische bewijs van een stelling uit de axioma's het intuïtieve inzicht in de juistheid van een bewering als bewijs te erkennen en waardoor zij zich gewapend zullen voelen tegen den spot, dien zij meent zich te mogen veroorloven over de „trouwe dienaren der wetenschap", die hun leerlingen trachten te overtuigen, dat zonder het bewijs van een „vanzelfsprekende" stelling hun geheele meetkundige weten op onzekere grondslagen gebouwd zou zijn.

Nu is een beroep op de traditie niet voor iedereen overtuigend; zelfs heeft het in onzen tijd, waarin gemis aan historischen zin tot de neiging voert, om juist de meest klassieke middelen van intellectueele opvoeding: oude talen en wiskunde, gering te schatten, vaak het tegendeel van de gewenschte uitwerking. Laat mij daarom trachten, de traditioneele methode van meetkunde-onderwijs ook met rechtstreeksche argumenten te verdedigen, door aan te toonen, dat het doeltreffender en zuiverder is, om het mathematisch inzicht te ontwikkelen door een zooveel mogelijk streng logischen opbouw der meetkunde op evidente grondslagen, dan, zooals Mevrouw Ehrenfest wil, de practische ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen te doen voorafgaan aan een, dan ook nog slechts geleidelijk ingevoerde, axiomatische behandelingswijze en dat er dus geen redenen bestaan, om van de heerschende traditie af te wijken.

Het zal daartoe noodig zijn, een onderscheiding te maken, die ik tot mijn groote verbazing in het geschrift van Mevrouw Ehrenfest nergens aantrof en die toch voor het elementaire wiskunde-onderwijs, zoowel van practisch, als van theoretisch standpunt uit, van fundamenteele beteekenis is, de onderscheiding namelijk tusschen de meetkunde van het platte vlak en die van de ruimte van drie afmetingen, tusschen planimetrie en stereometrie. Inderdaad, men moge van hooger mathematisch standpunt uit tusschen deze beide takken der elementaire meetkunde „slechts" een verschil in dimensie zien en dit verschil nog zelfs een gevolg achten van de „toevallige" keuze van het punt als bouwelement, vóór den leerling, die pas met de wiskunde kennis maakt, — en niet voor hem alleen! — blijft er een principiëel verschil bestaan tusschen een vak, waarin hij de beschouwde objecten in ware gedaante kan teekenen, om daarna die teekeningen zelf als de objecten op te vatten (want dat figuren in

krijt en potlood slechts grof-stoffelijke afbeeldingen zijn van punten en lijnen, inplaats van die punten en lijnen zelf, pleegt in de practijk van het meetkunde-onderwijs spoedig vergeten te worden) en een vak, waarin voortdurend een beroep wordt gedaan op zijn vermogen, om zich vlakken, lijnen en punten in een driedimensionale ruimte voor te stellen en waarin hij met teekeningen aanvankelijk een gemis aan dat vermogen niet kan vergoeden, omdat hij ook het stereometrisch teekenen nog leeren moet en de vrije voorstelling hem in eenvoudige gevallen nog gemakkelijker valt, dan het ontwerpen van de teekening.

Wanneer we nu de opvattingen van Mevrouw Ehrenfest in het bijzonder op het onderwijs in de planimetrie toepassen, dan is het niet geheel duidelijk, hoe zij zich den propaedeutischen cursus voor dit vak, waarin van het eigenlijke ruimtelijke voorstellingsvermogen nog niets gevergd wordt, voorstelt; de voorbeelden van vragen voor zulk een cursus, die zij geeft, zijn dan ook in overwegende mate stereometrisch van aard [1]) en men komt

---

[1]) De heer J. Beunk noemt in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs van 8 Oct. 1924 (21e Jaargang, No. 6, blz. 236 seq) een aantal voorbeelden van oefeningen in den propaedeutischen cursus voor de planimetrie. Ik vermeld hiervan de volgende:

„Oefeningen ter training van het voorstellingsvermogen en om tegelijkertijd de hersens te gebruiken. Te teekenen: wieken aan een molen, kraan aan een vat, beugel van een tram, knoop in een touw, zwengel aan een pomp, alphabet in spiegelschrift en op zijn kop enz.".

In dit voorstel kan ik niets anders zien dan dezelfde verwarring tusschen wiskunde en handteekenen, die Mevrouw Ehrenfest ook vaak begaat. Het vermogen, om zich iets voor te stellen, heeft met de vaardigheid, om het uit de vrije hand te kunnen schetsen, niets te maken, zoodat dan ook, zooals de ervaring leert, aanleg voor wiskunde en aanleg voor teekenen geenszins gepaard behoeven te gaan. Ik begrijp dan ook niet, wat de oefening in het teekenen van de genoemde objecten met een voorbereiding voor wiskunde-onderwijs heeft uit te staan.

In een andere groep noemt de inzender: „oefeningen, waarbij getracht wordt verschillende dingen te definieeren (wat echter niet altijd zal lukken) B.v. Wat is een stoel; wanneer noemt men iemand matroos." Men zou hier kunnen vragen, of het niet beter is, het vermogen tot het geven van definities aan de eenvoudige wiskundige objecten te oefenen (wat wel altijd zal lukken). B.v. Wat is een parallelogram? Wanneer noemt men een driehoek gelijkbeenig?

Soortgelijke opmerkingen gelden ook voor de overige vragen, waarin, ter voorbereiding op de meetkunde van Euclides, van detective-romans, kapotte

niet te weten, of zij bij de behandeling hiervan de planimetrie reeds bekend onderstelt (in welk geval de leerlingen toch reeds met de methode der axiomatica zouden hebben kennis gemaakt) of dat ze het meetkunde-onderwijs met planimetrie en stereometrie gelijktijdig wil beginnen [1]).

Wil de schrijfster het laatste niet, dan kan ik me niet anders voorstellen, of zij zou bij het planimetrie-onderwijs al zeer spoedig aan den z.g. systematischen cursus toe zijn, bijna even spoedig als bij de thans gebruikelijke methode, waarin ook menigmaal eenige tijd wordt besteed, om de leerlingen met de grondbegrippen en met het hanteeren der instrumenten vertrouwd te maken, het geval is. Echter zou dan het afwijkende karakter van haar methode eerst recht tot uiting komen, doordat zij den eisch wil laten vallen, dat alle stellingen, ook de z.g. vanzelfsprekende, bewezen moeten worden (in den zin der axiomatica).

Tegen dit verlangen nu, dat, voorzoover ik zie, op geen enkel ander argument steunt, dan dat de leerlingen voor het logische bewijs van een evidente stelling geen belangstelling kunnen hebben, wensch ik met nadruk te protesteeren, omdat de vervulling daarvan een aanslag zou beteekenen op wat steeds als een der meest kostelijke vruchten van het wiskunde-onderwijs heeft gegolden: op de zuiverheid en eerlijkheid van het mathematische denken en spreken, op de geestelijke tucht, orde en reinheid, die de mathesis nastreeft. Het is in het dagelijksch leven algemeen gewoonte, dat men elkaar niet al te nauwkeurig rekenschap vraagt van de motiveering van een uitgesproken oordeel, van de omschrijving van een ingevoerd begrip, van de beteekenis van een gebezigd woord: wie voortdurend op bewijs en definitie aan zou dringen, zou weldra als zeer onaangenaam mensch gemeden worden. Iedere wetenschap

---

kousen, quarantainestations en bananenschillen gesproken wordt, alles begrippen, die moeilijker te hanteeren zijn dan de concepties der elementaire meetkunde.

[1]) De mogelijkheid, ja wenschelijkheid van deze laatste methode is nog pas geleden verdedigd door den heer Macalester Loup in een voordracht voor een vergadering van L. I. W. E. N. A. G. E. L. op 29 Aug. 1924 gehouden en waarvan ik kennis nam door een verslag in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs van 26 Nov. 1924 (21e Jaargang, No. 13, blz. 510 seq.) Tegen de denkbeelden van den heer Macalester Loup zijn, naar het mij voorkomt, dezelfde bezwaren aan te voeren, die ik in de volgende bladzijden tegen de voorstellen van Mevr. Ehrenfest ontwikkel.

streeft er nu naar, deze voornaamste oorzaken van onzuiverheid in het denken weg te nemen, maar van alle slaagt de wiskunde, dank zij den onvergelijkelijken schijnbaren eenvoud van haar objecten, het best in de verwezenlijking van het ideaal. Dat dit slagen bij nadere beschouwing ook weer niet volkomen blijkt te zijn, dat de eenvoud van de mathematische grondbegrippen in werkelijkheid slechts een schijn is, die een wereld van problemen verbergt, doet voor ons doel nu niet ter zake; een feit is echter, dat de opgroeiende jeugd bij kennismaking met de wiskunde, welker grondslagen voor haar volkomen evident zijn, zich plotseling verplaatst vindt in een spheer, waar vage beweringen, slordige uitdrukkingen en onbegrepen woorden niet langer worden geduld, waar iedere zonde tegen de eerlijkheid van het denken zich zelf onmiddellijk verraadt en waar ze alle kennis van den aanvang af heeft zien opbouwen, op een wijze, die in haar logische onaantastbaarheid ook aan de minst mathematisch aangelegden de overtuiging pleegt te schenken, dat hier bij voldoende oefening het verwerven van de geëischte kennis voor niemand uitgesloten behoeft te zijn. [1])

De kennismaking met deze wereld nu is voor de ontwikkeling van het intellect een gebeurtenis van het hoogste belang (het wordt, meen ik, al sinds Plato zoo beschouwd) en men mag niets toelaten, dat de zuiverheid van de atmospheer, waarin daar wordt geademd, de hechtheid van den opbouw, die daar wordt voltrokken, zou kunnen schaden. En die schade zou worden toegebracht, wanneer de bekorende lokstem van Mevrouw Ehrenfest met haar verleidelijk beroep op de intuïtie gehoor mocht vinden. Men versta mij wel: Mevrouw Ehrenfest heeft natuurlijk volkomen gelijk met haar betoog, dat denken zonder intuïtie niet mogelijk is, dat denken niet is het formeel aaneenrijgen van syllogismen of het algebraisch correct bewerken van formules, zonder dat de materieële inhoud van de bestanddeelen van het syllogisme of de reëele beteekenis van de symbolen, die in de formules op-

---

[1]) Dat de logische onaantastbaarheid der elementaire meetkunde bij scherpere kritiek niet volkomen blijkt te zijn, kan hier buiten beschouwing blijven. De leerlingen plegen de gebruikte redeneeringen als absoluut dwingend te voelen, zelfs daar, waar, zooals bij het opnemen en weer neerleggen van driehoeken in de congruentiebewijzen, de logische strengheid in werkelijkheid geheel zoek is.

treden, ons helder voor den geest staan. Het is mij trouwens niet bekend, dat er ooit beweerd is, dat dit wel het geval zou zijn en het lijkt mij dus eenigszins overbodig, het zoo uitdrukkelijk te betoogen. Maar het gaat hier nu niet in de eerste plaats om theoretische beschouwingen over de beteekenis van het woord „denken", maar om de practische vraag, of het wiskunde-onderwijs nog vruchten kan dragen, wanneer het gewoonte wordt, om stellingen, die een geheele klasse evident vindt (ik vermoed, dat de schrijfster het oog heeft op de stelling van de gelijkheid der basishoeken van een gelijkbeenigen driehoek, op de stelling, dat de som van twee zijden van een driehoek grooter is dan de derde, en dergelijke), zonder bewijs te aanvaarden of liever, de evidentie zelf als een bewijs (in den zin der Ruimteleer) op te vatten.

Ik wil nu Mevrouw Ehrenfest niet krenken in haar paedagogische overtuigingen door het cynische vermoeden te opperen, dat in de practijk de neiging van een klasse, om stellingen intuïtief duidelijk te vinden, wel eens onbehagelijk ver zou kunnen gaan, maar vooreerst alleen de vraag opwerpen, wat er gedaan zou moeten worden, wanneer de intuïtie de gezamenlijke leerlingen eens op een dwaalspoor zou gaan voeren. De intuïtie van den beginneling — en niet van hem alleen — staat vaak vrijwel gelijk met raden, vermoeden, plausibel vinden, en het is dus denkbaar, dat een leerling op een gegeven oogenblik een intuïtieve overtuiging bezit, die onjuist is. Hij kan bijvoorbeeld meenen, dat de hoeken van een driehoek evenredig zijn met de zijden (een in het elementaire meetkunde-onderwijs veel voorkomende fout), of het plan opvatten, een hoek in drie gelijke deelen te verdeelen, door de koorde van den boog, waarvan die hoek middelpuntshoek is, in drie gelijke deelen te verdeelen (een gebruikelijke poging tot oplossing der trisectie). Deze foutieve intuïties zullen dan toch gecorrigeerd moeten worden en nu is het mij niet duidelijk, hoe Mevrouw Ehrenfest dit doen wil. Vermoedelijk zal zij echter trachten, een logische contradictie aan te toonen met andere, intuïtief duidelijke stellingen (logisch bewezen is er immers op het beschouwde oogenblik mogelijk nog niets), maar zal door zulk een voorval de overtuigende kracht van het intuïtieve inzicht, van de evidentie, niet sterk verzwakt worden? Zal dus een contrôle op wat de intuïtie leert niet ook wenschelijk blijken in de gevallen, waarin de leerlingen, zooals de leeraar weet, goed ge-

raden hebben en zal het niet zelfs de plicht van den leeraar zijn, wantrouwen tegen de uitspraken der intuïtie op te wekken, wanneer dit niet spontaan ontstaat? Zoo voortredeneerende moet men echter weer terugkeeren tot het standpunt, waarop het traditioneele meetkunde-onderwijs staat: het ontstaan van alle spontane vermoedens, inzichten en overtuigingen bij de leerlingen toejuichen, eigen initiatief aanwakkeren, maar niets definitief aanvaarden zonder streng logisch bewijs. Wat dan ook moderne critiek[1]) moge hebben aan te merken op het adagium, waarmede Dedekind zijn klassieke verhandeling over het getalbegrip[2]) aanvangt: „*Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden*", voor het onderwijs, voor de inwijding in de mysteriën der wiskunde blijft de overtuiging, die in deze woorden tot uiting komt, het richtsnoer, dat redelijke bezinning en practisch overleg als om strijd aanbevelen.

Men vergelijke toch ook eens de rustige betrouwbare wijze, waarop in het traditioneele onderwijs in de vlakke meetkunde van de fundamenten af steen op steen gelegd wordt, totdat de groote lijnen van het gebouw aan iederen leerling, dien men er zich slechts aan laat wennen, steeds weer in gedachten den opbouw van de grondslagen af te overzien, helder voor den geest staan, met de spheer van onrust en onzekerheid, die de methode van Mevrouw Ehrenfest noodzakelijk zal moeten scheppen. Bij haar begint, wat men gewoonlijk bewijzen noemt, pas als er twijfel aan de juistheid van een stelling wordt geopperd; daardoor is dus steeds slechts een deel van de bekende stellingen op een bewijs, het andere, meer fundamenteele deel echter op een, bij den eenen leerling wat vager, bij den anderen wat helderder inzicht, geloof, vermoeden, gebaseerd. Twijfel, die achteraf ontstaat, zal het noodig kunnen maken, een reeds intuïtief aanvaarde stelling toch nog weer te gaan bewijzen, totdat ten slotte de algemeene axiomatische revisie komt, waarin alles nog eens bewezen wordt. Zal er één leerling zijn, die op een gegeven oogenblik nog weet wat hij eigenlijk weet en wat hij alleen maar vermoedt, maar nog niet weet? Of zal men hem, wat ik een vergrijp aan zijn ziel zou

---

[1]) H. Weyl, *Das Kontinuum, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Leipzig 1918. pag. 11, noot.

[2]) R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* Dritte Unveränderte Auflage. Braunschweig 1911. Vorwort zur ersten Auflage, pag. VII.

vinden, leeren, dat weten in de Ruimteleer iets anders is dan in de Axiomatica?

Het spreekt verder vanzelf, dat contrôle of een leerling een stelling werkelijk intuïtief inziet of dat hij slechts napraat, wat hij door anderen met nadruk als volkomen vanzelfsprekend hoort vermelden, uitgesloten is; voor toepassing van de zoo bij uitstek nuttige methode, om bij elke stelling nog even na te gaan, langs welke wegen ze geleidelijk uit de axioma's is ontstaan, is in het geheel geen plaats meer, omdat op een gegeven punt de verklaring van intuïtieve overtuiging alle verder doordringen afweert.

Ik kan dan ook vooralsnog niet gelooven, dat het stelsel van Mevrouw Ehrenfest voldoet aan den eersten eisch, dien men aan een paedagogische methode mag stellen, namelijk dat ze gegroeid is in de practijk van het onderwijs, inplaats van te zijn voortgebracht uit theoretische beschouwingen.

En die indruk wordt nog versterkt, wanneer ik thans mijn aandacht richt op de toepassing van haar denkbeelden op het onderwijs in de Stereometrie. Mijn persoonlijke ervaring, aangaande het onderwijs in dit vak, opgedaan in vroegere schooljaren en later als leeraar, is, dat de kennismaking met de ruimte van drie afmetingen voor het grootste deel der leerlingen en wel voornamelijk voor de ernstigsten onder de niet speciaal mathematisch aangelegden, zeer aanzienlijke, maar op den duur overwinbare moeilijkheden met zich mee voert. Het ruimtelijk voorstellingsvermogen is bij de meesten zoo zwak, dat het slechts zeer korten tijd in actie kan blijven en zoo weinig omvattend, dat het spoedig overbelast is; de stereometrische teekeningen, doorzichtig, als ze klaar worden voorgelegd, vormen voor den beginneling, die ze teekenen moet, problemen op zich zelf, waarvan op den duur een zekere routine de practische oplossing wel brengt, maar waarin het werkelijk inzicht, binnen het kader der H. B. S.-wiskunde, niet kan worden gegeven, omdat die schijnbaar zoo willekeurige, maar van een gegeven oogenblik af streng bepaalde schetsen in werkelijkheid projectieteekeningen in scheeve parallelprojectie of axonometrie zijn.

Het is nu juist tot genezing van dit hinderlijke gemis aan voorstellingsvermogen, dat Mevrouw Ehrenfest, voornamelijk ten bate van de niet wiskundig aangelegden haar propaedeutischen cursus aan den systematischen wil laten voorafgaan en ze noemt

tal van onderwerpen, die in zulk een cursus zouden kunnen worden behandeld. Die onderwerpen zijn echter grootendeels van dien aard, dat ze, wel verre van het voorstellingsvermogen eerst tot ontwikkeling te brengen, reeds het bezit van een zeer aanzienlijke mate van dit vermogen (vaak zelfs aanzienlijker, dan de gemiddelde niet mathematisch aangelegde leerling aan het eind van zijn schooltijd verworven heeft) vereischen. Men oordeele en bedenke, dat de deelnemers van dezen cursus nog geenerlei stereometrie-onderwijs (in den gebruikelijken zin van het woord) hebben genoten:

Hoeken tusschen twee platte vlakken. Drie- en meervlakshoeken. Bekijken, zich voorstellen, perspectivisch teekenen naar het geheugen van verschillende polyeders.

Doorsneden van een tweevlakshoek met een plat vlak. Verandering van den hoek van doorsnede bij wenteling van het vlak om een lijn, die de ribbe van den tweevlakshoek snijdt.

Vlakke doorsneden van polyeders, zich voorstellen, uit vrije hand teekenen, toetsen aan plastilinmodellen. Verandering van de doorsnede bij translatie of rotatie van het snijvlak.

Topologie der lijnen in de ruimte. Doorsnede van twee cylinders, van twee willekeurige oppervlakken van den tweeden graad.

Ik vertrouw, dat deze opsomming[1]), die weliswaar de moeilijkste der opgegeven onderwerpen bevat, maar toch nog steeds zulke, die in den propaedeutischen cursus thuis zouden behooren, voor menigeen voldoende zal zijn. Persoonlijk weiger ik althans te gelooven, dat er in deze wereld niet mathematisch aangelegde leerlingen voorkomen, die van een dergelijke taak ook maar iets terecht kunnen brengen en die niet tot wanhoop zullen worden gedreven, wanneer men hun de kennis van zulke onderwerpen, bij wijze van inleiding in de stereometrie, wil bijbrengen. Zelfs waag ik het, op gevaar af, daardoor de maat der geringschatting, die Mevrouw Ehrenfest op grond van al het bovenstaande wellicht

---

[1]) Natuurlijk beschouwt Mevr. Ehrenfest deze opsomming slechts als een voorbeeld voor een programma van een propadeutischen cursus, niet als een voor de aanhangers van haar methode bindend voorschrift. Het lijkt mij echter wel, dat men, wil de propaedeutische cursus werkelijk dien naam verdienen, dus meer dan één of twee lesuren omvatten, altijd al spoedig op onderwerpen van dezelfde moeilijkheid, als de boven aangehaalde, aangewezen zal zijn.

voor mij zal hebben opgevat, te doen volloopen, haar te bekennen, dat ik mij zelven niet in het minst in staat zou achten, uit het geheugen een perspectivische schets van een regelmatig twintigvlak te maken, maar dat ik nog niet tot de overtuiging ben gekomen, dat ik daardoor ongeschikt ben voor mijn ambt.

Intusschen meent Mevrouw Ehrenfest het zeer ernstig met haar voorstel; met de woorden:

bij iedere systematische en nauwkeurige behandeling der hier opgenoemde voorwerpen moet men er de voorstelling en de qualitatieve schatting reeds van te voren van bezitten, om niet wanhopend hulpeloos daartegenover te staan; deze kan niet synthetisch opgebouwd worden, uitgaande van de correct bewezen stellingen van de systematischen cursus; integendeel: deze stellingen zeggen werkelijk iets alleen aan hen, die reeds voor de studie van de Meetkunde voldoende ruimtelijke beelden in hun geest opgenomen hebben,

veroordeelt zij zelfs principiëel de thans in het Meetkunde-onderwijs overheerschend gangbare methode. Voor een zuivere beoordeeling zal het noodig zijn, deze algemeene verklaring los van de alarmeerende voorbeelden te beschouwen.

Ik zou dan ten eerste de vraag willen stellen, of Mevrouw Ehrenfest de in bovenstaande woorden uitgedrukte opvatting overal in de Meetkunde consequent doorgevoerd wenscht te zien, of zij dus voor een systematische en nauwkeurige behandeling van bijvoorbeeld regelvlakken van hoogeren dan den tweeden graad (om slechts één voorbeeld uit vele te noemen), het noodig acht van zulke lichamen een ruimtelijke voorstelling en qualitatieve schatting te bezitten en of zij dien eisch bijgeval ook stelt bij de meetkundige behandeling van meerdimensionale varieteiten. En wanneer zij deze vraag, wat wel zeer waarschijnlijk is, ontkennend beantwoordt, zou ik ten tweede willen vragen, of, wanneer de geschoolde mathematicus van een gegeven punt af (dat niet eens zoo heel ver weg ligt) van het verkrijgen van een totale ruimtelijke voorstelling van zijn geestesscheppingen afziet, het wel redelijk en noodzakelijk is, bij den niet mathematisch aangelegden jeugdigen leerling een vermogen te willen ontwikkelen tot voorstelling van alle ruimtevormen, die hij meetkundig zal moeten beheerschen en zelfs nog van moeilijkere dan deze, en dan nog wel zulk een poging te wagen vóór het begin van het systematische meetkunde-onderwijs.

Het lijkt echter wel, of Mevrouw Ehrenfest, al zegt ze dit niet uitdrukkelijk, ruimte-inzicht synoniem acht met ruimtelijk voorstellingsvermogen, en daar ze, sprekend van de Ruimteleer, dit

vermogen intuïtie noemt, is het niet moeilijk in te zien, langs welken weg zij eigenlijk tot hare opvattingen komt. Inderdaad kan men de groote lijn van haar betoog weergeven in het volgende syllogisme:

Geen denken is mogelijk zonder intuïtie.

Intuïtie is in de Ruimteleer identiek met ruimtelijk voorstellingsvermogen.

Dus is geen meetkundig denken mogelijk zonder ruimtelijk voorstellingsvermogen.

Het is echter duidelijk, dat, zoodra men de, door Mevrouw Ehrenfest als een hulpmiddel voor haar betoog ingevoerde, onderscheiding van de Meetkunde in Ruimteleer en Axiomatica niet meer erkent, de minor van dit syllogisme zijn waarde verliest, omdat dan, zooals we nog nader zullen betoogen, intuïtie geenzins met ruimtelijk voorstellingsvermogen identiek behoeft te zijn. Met de minor valt echter de conclusie en daarmee het geheele systeem, dat de schrijfster ontwikkelt.

En dat nu werkelijk meetkundige intuïtie en ruimtelijk voorstellingsvermogen geen synoniemen zijn, maar veeleer het voorstellingsvermogen een der vele vormen is, waarin de geometrische intuïtie zich kan uiten, is het noodig, dit nog uitvoerig te betoogen? Is niet ieder zuiver meetkundig denkproces, waarbij we geen voorstelling meer hebben van de objecten, die we overpeinzen, in het bijzonder iedere meetkundige redeneering in een ruimte van meer dan drie afmetingen, waarin toch ook intuïtief vermoede stellingen achteraf logisch worden bewezen, een bewijs, dat meetkundig denken mogelijk is zonder ruimtelijke voorstelling en dus in verband met het uitganspunt van Mevrouw Ehrenfest: geen denken zonder intuïtie, ook weer een bewijs, dat het begrip intuïtie ruimer is dan het begrip voorstellingsvermogen?

En dit is een zegen voor hen, die geroepen zijn om aan niet mathematisch aangelegde leerlingen de beginselen der Stereometrie bij te brengen en die tevens skeptisch staan tegenover de mogelijkheid, om het voorstellingsvermogen van die leerlingen verder dan tot een zeer bescheiden peil te ontwikkelen. Wat zou er voor dezulken, indien Mevrouw Ehrenfest gelijk had en haar propaedeutische cursus, hoewel onuitvoerbaar, noodzakelijk was, anders overblijven dan wanhoop over hun ambt? Nu echter zien zij de mogelijkheid, om, met ontkenning van de gangbare bewering,

dat, wie geen goed voorstellingsvermogen heeft, de Stereometrie en de Beschrijvende Meetkunde van de H. B. S. niet zou kunnen leeren, het ruimte-inzicht van hun leerlingen door een beroep op andere intuïtieve vermogens, naast dat der ruimtelijke voorstelling, te ontwikkelen. Daartoe is echter een ding noodig: synthetische opbouw van het ruimte-inzicht op grond van de correct bewezen stellingen van den systematischen cursus, juist dus wat Mevrouw Ehrenfest voor onmogelijk verklaart. Een nadere uiteenzetting van de bedoelde opvatting kan dus niet achterwege blijven.

Vooraf ga de opmerking, dat de meetkunde der ruimte van drie afmetingen natuurlijk steeds eenig vermogen tot vrije, d. w. z. niet door een teekening ondersteunde voorstelling van eenvoudige objecten in de ruimte eischt. Iedereen zal het in ieder geval zoover moeten brengen, dat hij zich twee lijnen of vlakken in willekeurigen, evenwijdigen of loodrechten stand kan voorstellen, maar de practijk leert, dat ook de minst mathematische leerling zoover wel komen kan, wanneer hij slechts in voldoende mate er aan gewend wordt, zich, zoolang de gebruikte termen niet onmiddellijk een heldere voorstelling bij hem doen ontstaan, steeds weer van stoffelijke hulpmiddelen, stukken papier of karton voor vlakken, potlooden of breinaalden voor lijnen, te bedienen en de besproken situatie tastbaar in de ruimte voor zich op te stellen. Op deze wijze kan ieder van de fundamenteele stellingen, die men in de eerste hoofdstukken van de leerboeken der Stereometrie bewezen vindt, een voldoend heldere voorstelling verkrijgen, waarbij het voldoende is, indien de ligging der configuraties zoo eenvoudig mogelijk gedacht wordt, bijvoorbeeld bij een lijn, loodrecht op een vlak, het vlak horizontaal en de lijn verticaal. Wanneer nu bovendien gezorgd is voor een volkomen soliede kennis van die fundamenteele stellingen, behoeft men bij vraagstukken, waarin de gegevens niet meer den eenvoudigen stand hebben, die in de bewijzen der stellingen steeds werd aangenomen, geenszins te vergen, dat alle bij de oplossing van het probleem optredende objecten ook in werkelijke ligging worden voorgesteld. Ik wil dit aan een voorbeeld toelichten, dat geheel willekeurig uit een veel voorkomende groep van stereometrische vraagstukken gekozen is, zoodat iedereen er naar willekeur soortgelijke aan zal kunnen toevoegen.

Gevraagd moge worden een rechte x te construeeren, die twee gegeven kruisende rechten l en m onder gelijke hoeken kruist,

evenwijdig is aan een vlak *V* en twee gegeven kruisende rechten *p* en *q* snijdt. Het is voor den gemiddelden leerling zeer moeilijk, zich de gegevens van zulk een probleem als geheel, laat staan de oplossing ervan, werkelijk voor te stellen. Is het nu echter niet voldoende, wanneer de leerling, zijn aandacht richtende op het eerste deel van het gevraagde, zich herinnert, dat volgens een der bewezen fundamenteele stellingen de meetkundige plaats van de lijnen door een punt, die twee gegeven kruisende lijnen onder gelijke hoeken kruisen, uit twee onderling loodrechte vlakken bestaat, wanneer hij dan, overtuigd van het bestaan van zulk een tweetal vlakken ook voor de lijnen *l* en *m*, deze lijnen zelf verder vergeet en slechts de aanwezigheid van (voorloopig) één vlak noteert als meetkundige plaats, die behoort bij het eerste deel van het gevraagde; wanneer hij dan alleen let op de voorwaarde, dat de gevraagde lijn evenwijdig moet zijn aan een vlak en, weer op grond van een fundamenteele stelling, een tweede meetkundige plaats vindt voor de lijnen door een willekeurig punt, die aan de tweede voorwaarde voldoen; om vervolgens, na door snijding der twee, niet voorgestelde, maar slechts aanwezig geweten vlakken, een lijn te vinden, die aan alle richtingsgegevens voldoet en dus alleen het probleem over te houden, een transversaal van gegeven richting over twee kruisenden te leggen?

Dit probleem zal in het stadium, waarin bovenstaand vraagstuk kan worden opgegeven, reeds lang bekend zijn. Toch wil ik het een oogenblik beschouwen, om ook aan dit zeer elementaire, reeds in een der eerste lessen optredende vraagstuk de bewering van Mevrouw Ehrenfest te toetsen, dat van inzicht in een ruimtelijk probleem alleen dan sprake zou kunnen zijn, wanneer reeds van te voren een voorstelling van de oplossing bestaat. Moet hier een leerling zich werkelijk de gewenschte lijn voorstellen, om de oplossing te kunnen geven? Geenszins! Wanneer hij, zonder zijn voorstellingsvermogen in werking te stellen, opmerkt, dat, volgens een fundamenteele stelling, alle lijnen van gegeven richting, die een gegeven lijn snijden, in een plat vlak liggen, kan hij twee dergelijke platte vlakken aanwezig weten en in hun snijlijn de gewenschte oplossing bezitten, zonder dat hij zich dus bij het geheele vraagstuk, dat we boven stelden, ooit iets meer heeft behoeven voor te stellen of te herinneren, dan een van zijn fundamenteele stellingen.

Ieder, die met het stereometrie-onderwijs vertrouwd is, zal weten, dat gevallen, die niet principiëel verschillen van het hier behandelde, zeer vaak voorkomen en dat vrijwel alle ruimte-constructies, die in het meetkunde-onderwijs zulk een belangrijke rol spelen, op de besproken wijze de gelegenheid bieden, om door strenge beperking der aandacht tot wat op ieder oogenblik voor het voortzetten der redeneering voldoende is, het stellen van te hooge eischen aan het voorstellingsvermogen te vermijden en daardoor den niet mathematisch aangelegden leerling het wanhopige gevoel van hulpeloosheid te besparen, dat hem kan overvallen, wanneer zijn meer met voorstellingsvermogen begaafde medeleerlingen of zijn sterk op de intuïtie den nadruk leggende leeraar, plotseling iets „zien", waarvan hij zich niets kan voorstellen.

Men kan juist den niet wiskundig aangelegden leerling geen sterkeren moreelen steun geven, dan wanneer men hem de overtuiging weet bij te brengen, dat alles wat hij op H. B. S. van Wiskunde heeft te leeren (de vaak zoo gevreesde Beschrijvende Meetkunde niet uitgesloten[1]) voor hem bereikbaar is door zuiver logisch redeneeren en dat een goed voorstellingsvermogen weliswaar voor hem, die het bezit, een machtig hulpmiddel vormt, maar dat het gemis aan dat vermogen nooit een onoverkomelijk struikelblok kan zijn.

En is nu een meetkundige redeneering, die als boven het bestaan van het te construeeren object bewijst, waardeloos, wanneer ze

---

[1]) Juist op het gebied der Beschrijvende Meetkunde kan men de aan het voorstellingsvermogen van niet wiskundig aangelegde leerlingen te stellen eischen zoo matig houden. Men denke b.v. aan het neerslaan van een vlak op het horizontale projectievlak. Wanneer het den leerling gelukt, zich dit helder voor te stellen voor het geval, dat het vlak loodrecht staat op het verticale projectievlak, behoeft men desnoods de voorstelling in het algemeene geval niet te eischen, omdat hij door het aannemen van een nieuw verticaa projectievlak het algemeene geval tot het bijzondere terug kan brengen en nu alle manipulaties in volkomen analogie tot die van het bijzondere geval kan uitvoeren. Langzamerhand zal dan vaak ook in het algemeene geval de heldere voorstelling ontstaan. Hetzelfde geldt voor alle constructies, die gemakkelijker voor te stellen zijn, indien ze moeten worden uitgevoerd ten opzichte van het horizontale dan ten opzichte van het verticale projectievlak, zooals het bepalen van den hoek van een vlak met een projectievlak. Ook hier kan aandacht voor formeele analogie het voorstellingsvermogen vervangen.

niet vergezeld wordt door een voorstelling van de ligging van dat object ten opzichte van de gegevens? Natuurlijk is het beter, wanneer men wèl in staat is, om die voorstelling te verkrijgen, maar wanneer dat nu niet óf niet voldoende gelukt (en we spreken immers voortdurend over leerlingen zonder aanleg voor wiskunde) is dan toch het oplossen van een probleem als het bovenstaande niet een logische oefening geweest, zooals men ze buiten de wiskunde niet licht zal aantreffen? Bovendien zal ze tot verheldering van de voorstelling der telkens weer gebruikte fundamenteele stellingen hebben bijgedragen en zoo er toe hebben medegewerkt, dat er langzamerhand al wat meer van het voorstellingsvermogen kan worden gevergd. En wanneer dan langzamerhand de vaardigheid in het teekenen van stereometrische figuren door systematische oefening verkregen is, blijkt in de practijk gewoonlijk, dat bij de behandeling der door platte vlakken begrensde lichamen de grootste moeilijkheden overwonnen zijn.

Hoe zou men nu echter de boven geschetste handelwijze, waarvan de methode, wel verre van ook maar eenigszins origineel te zijn, naar ik vermoed wel bijna overal in het practische meetkunde-onderwijs zal worden gevolgd, anders moeten noemen dan „synthetische opbouw van het ruimte-inzicht, uitgaande van de correct bewezen stellingen van den systematischen cursus"?

Laten we verder ook niet vergeten, dat er, juist in het meetkunde-onderwijs, nog verschillende andere hulpmiddelen bestaan, die niets met voorstellingsvermogen te maken hebben en die niet alleen practische waarde bezitten voor de oplossing van wiskundige vraastukken, maar welker bewuste hanteering er toe bij kan dragen, het wiskunde-onderwijs ook voor hen, die later nooit meer met de wiskunde te maken zullen hebben, vruchtdragend te maken. Ik bedoel al die gevallen, waarin een weloverwogen notatie, een geschikte symboliek, een juiste kijk op symmetrie of gemis aan symmetrie in de letters, die een der voorkomende objecten aanduiden, den weg tot de oplossing wijzen en die oplossing met zeer veel minder moeite en omslag doen vinden, dan ze veroorzaakt aan wie op al deze formeele dingen niet let. Iedere wiskundige zal hiervoor tallooze voorbeelden kunnen aanvoeren; ik noem hier als algemeene hulpmiddelen in de elementaire wiskunde: het gebruik van het Σ-teeken, de cyclische omwisseling, de noteering van de cofactoren van een veelterm met indices; als

bijzondere planimetrische toepassingen: het gemak, dat ontstaat, door de letters, die de hoekpunten van gelijkvormige figuren aangeven, in de volgorde te schrijven, waarin die hoekpunten met elkaar correspondeeren, waardoor men de evenredigheden tusschen de zijden kan opschrijven, zonder de figuur te raadplegen; verder de vereenvoudiging, die in de bewijzen van alle stellingen over hoogtelijnen verkregen wordt, door de voetpunten der hoogtelijnen uit de hoekpunten A, B, C, als A_1, B_1, C_1, te noteeren. Zoo kan in de stereometrie, in het bijzonder in vraagstukken over viervlakken en drievlakshoeken, door het schenken van de noodige aandacht aan de notatie een belangrijke besparing van inspanning van het voorstellingsvermogen worden verkregen: ik herinner aan de stellingen van Menelaos en Ceva, of, om een voorbeeld te noemen, dat meer in het H. B. S.-onderwijs thuis hoort, aan het bewijs, dat de vier hoogtelijnen van een orthocentrisch viervlak door één punt gaan (waarbij ik me het orthocentrisch viervlak gedefinieerd denk door den loodrechten stand der kruisende ribben). Is toch in dit bewijs eenmaal bewezen, dat de hoogtelijnen AA_1 en BB_1 elkaar snijden in een punt H en moet nu worden aangetoond, dat CH hoogtelijn op ABD is, dan kan men, zonder hulp van het voorstellingsvermogen, om zuiver formeele redenen, inzien, dat men dit doel zal bereiken, door de lijn CH als snijlijn van de vlakken ACH en BCH te beschouwen, waarvan het eerste op geen andere ribbe dan op BD, het tweede op geen andere dan op AD loodrecht zal kunnen staan.

Zijn dit alles geen dingen, die ook waarde hebben voor hen, die later nooit meer iets met de wiskunde te maken zullen of willen hebben? Zou zelfs de meest nuchtere practicus, die wiskunde maar een onvoordeelig tijdverdrijf vindt, niet iets voor zulk een succes van goede organisatie voelen? En oefent toch ook weer niet een formeel volkomen correcte oplossing van een mathematisch probleem een aesthetische bekoring uit op ieder, die voor helderheid en harmonie gevoelig is?

Het doet waarlijk vreemd aan, dat over al dergelijke zaken in een brochure als die van Mevrouw Ehrenfest, waarin onderzocht wordt, wat het meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige kan en moet geven, volkomen gezwegen wordt. Het lijkt mij toe, dat Mevrouw Ehrenfest zich eenigszins blind staart op het ruimtelijk voorstellingsvermogen en het zou mij zelfs niet verwonderen,

indien zij al de boven aangevoerde verdiensten der mathematische denkwijze als zuiver formeel zou geringschatten. Voor die geringschatting bestaat echter niet de minste reden: het dualisme van materie en vorm (dat Mevrouw Ehrenfest in het wezen van de zaak huldigt, waar zij tusschen „rekenen" en „denken", beide in haar terminologie, onderscheidt) staat nergens zwakker, dan waar het het bestaan van een onverbrekelijk verband tusschen de waarde van een gedachte en die van den vorm, waarin de gedachte wordt uitgedrukt, wil ontkennen. Slordig spreken wijst op slordig denken en wie iets niet in woorden kan brengen geeft daardoor blijk, dat hij het nog niet volkomen doordacht heeft.

En er is nog zooveel meer, dat de wiskunde voor ieder de beoefening waard maakt. Ik sprak boven reeds over de weldadige strengheid in definitie, oordeelvelling en bewijsvoering, die zij leert na te streven en wijs thans nog, als een voorbeeld uit vele, op het groote practische nut, dat er gelegen is in de onderscheiding tusschen een stelling (uit *a* volgt *b*), het omgekeerde van die stelling (uit *b* volgt *a*), dat niet, en haar logische omkeering (uit niet-*b* volgt niet-*a*), die wel steeds tegelijk met de stelling juist is. Welk een onvruchtbare discussies en voorbarige oordeelvellingen zouden er in het dagelijksche leven vermeden kunnen worden, indien iedereen zich van deze onderscheiding steeds bewust was. Welk een vooruitgang ook, indien iedereen eens bewust tusschen het noodig-zijn en het voldoende-zijn van een voorwaarde verschil wist te maken.

Het wordt echter tijd, om tot de brochure van Mevrouw Ehrenfest terug te keeren, waarin nog enkele dingen zijn, die tot een bespreking aanleiding geven.

In de eerste plaats verwerpt de schrijfster de gelegenheid tot zelfwerkzaamheid der leerlingen, die in het gebruikelijke meetkunde-onderwijs door het opgeven van vraagstukken geboden wordt, op grond van de overweging, dat de hierin te bewijzen stellingen meestal ingewikkelder zijn dan die van het meetkundig systeem zelf, dat men den leerling wil doen kennen en dat er voor de oplossing daarvan een speciaal meetkundig uitvindingsvermogen noodig is, dat men bij een niet meetkundige toch niet kan aankweeken.

Toegevende, dat er heel wat kunstmatig in elkaar gezette en slechts met behulp van een uitgesproken wiskunde-aanleg oplosbare

vraagstukken in omloop zijn, moet ik hiertegen opmerken, dat het gevelde oordeel in zijn groote generalisatie volkomen onbillijk en onjuist is; een blik op goede leerboeken der Meetkunde (werken als die van Molenbroek, Wijdenes, Van Thijn) is voldoende, om te doen inzien, dat de groote meerderheid der daarin voorkomende vraagstukken geeft, wat men er van eischen kan en moet: oefenmateriaal tot het verkrijgen tot een volkomen vaste kennis der fundamenteele stellingen, als zoodanig bereikbaar voor den gemiddelden leerling en voor hem even onmisbaar, als vingeroefeningen voor wie piano wil leeren spelen en thema's voor wie een taal wil leeren.

In de tweede plaats klaagt Mevrouw Ehrenfest over overlading in het meetkunde-onderwijs, een klacht, waarmee ze ongetwijfeld in ruimen kring instemming zal verwerven, omdat wie deze modeleuze aanheft, op ieder gebied van onderwijs op toejuiching kan rekenen. Die overlading zou daarin bestaan, dat men in den opbouw van het systeem stellingen opneemt, die niet strict noodzakelijk zijn voor de afleiding van die betrekkingen, waarom de geheele opbouw eigenlijk ondernomen wordt, wat volgens de schrijfster in de Elementaire Meetkunde de quantitatieve betrekkingen ter berekening van het oppervlak en het volume van den bol zijn. Dit vind ik een zeer onmathematische opmerking [1]). Ik ontken met nadruk, dat het laatste onderwerp, dat op de H. B. S. behandeld wordt, het doel zou zijn, ter bereiking waarvan het geheele meetkunde-onderwijs wordt gegeven, zooals ik overal in de wiskunde ontken, dat het einde met het doel identiek zou zijn. Is misschien het slotaccoord ook het doel, waarmee een symphonie gespeeld wordt? De wiskunde is overal centrum en nergens peripherie en wat ik als doel van het meetkunde-onderwijs zie, oefening in zuiver denken en spreken, kan in iedere les, bij de

[1]) Ik hoop, dat ik Mevrouw Ehrenfest hier goed begrijp; ik kan echter niets anders lezen dan het boven weergegevene in de volgende zinnen: blz. 16. Deze geest (sc. de geest van de Euclidische methode) wordt echter op den achtergrond gedrongen, wanneer men in den opbouw van het systeem stellingen opneemt, die niet strict noodzakelijk zijn voor de afleiding van die betrekkingen, waarom de geheele opbouw eigenlijk ondernomen is. Dat wat in de Elementaire Meetkunde tenslotte verkregen wordt, zijn de quantitatieve betrekkingen ter berekening van het oppervlak en het volumen van den bol.

behandeling van ieder onderwerp, bereikt worden, zonder dat men er op let, wat later komt.

En ten slotte nog een enkel woord over een soort vervolg op haar brochure, dat Mevrouw Ehrenfest heeft laten verschijnen in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar onderwijs [1]), door naar aanleiding van een opmerking van Prof. Mannoury een enquête te openen over de vraag, of er misschien ook leerlingen zijn, voor wie het wiskunde-onderwijs schadelijk is, omdat de mathematische geesteshouding hun anders gerichte instincten zou kunnen verlammen en wat men zulke leerlingen dan wel moet laten doen, om hun gelegenheid tot oefening in consequent doordenken te geven, het bestudeeren van borduren, zakkenrollen, kaartspelen, of, volgens het onvolprezen denkbeeld van den heer Kohnstamm, het oefenen van kritiek op romans van Ivans. Mevrouw Ehrenfest verklaart daarbij, dat zij het jammer zou vinden, indien men deze gelegenheid tot bespreking van zoo'n belangrijk en moeilijk vraagstuk heelemaal voorbij liet gaan.

Voorzoover mij bekend is, heeft nog niemand een antwoord op deze vragen gepubliceerd; de Nederlandsche wiskunde-leeraren zitten blijkbaar met de zaak verlegen of misschien wachten zij op de meer algemeene probleemstelling, of er ook leerlingen zijn, voor wie alle denken schadelijk is.

Mevrouw Ehrenfest sta mij toe, dit geschrift te besluiten met den wensch, dat zij nog vaak hare, ook voor den tegenstander steeds zeer belangwekkende denkbeelden over het wiskunde-onderwijs zal uiten, maar tevens mijn twijfel er over uit te spreken, of de corrupte individuen, die door de mathesis schade zouden kunnen lijden aan de ziel, zoo ze al bestaan, de aandacht wel waard zijn, die zij zoo nadrukkelijk voor hen opeischt.

Oisterwijk, October 1924. E. J. DIJKSTERHUIS.

---

[1]) Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs van 10 Sept. 1924. (Jaargang 21, No. 2; blz. 67 seq.)

Dr. J. G. Rutgers: „Meetkunde der Kegelsneden". Noordhoff's Verzameling van wiskundige werken, deel 9. Groningen, P. Noordhoff, 1924.

Rutgers' „Meetkunde der Kegelsneden" geeft juist datgene, waarnaar schrijver dezes reeds geruimen tijd verlangend had uitgezien, nl. een beknopt, maar helder geschreven Nederlandsch leerboek, waarin opnieuw wordt aangetoond hoe, met volkomen elementaire hulpmiddelen, de theorie der kegelsneden kan worden ontwikkeld, en welk een paedagogische misgreep het daarom is, deze theorie nog steeds uit het M.O. te weren. Niet dat ik dit leerboek in handen der leerlingen zou wenschen, o neen, in handen der *leeraren,* opdat dezen er voortdurend „Anregung" uit zouden putten om hun leerlingen te laten zien, dat men van de door hen voorgedragen theorieën over congruentie, gelijkvormigheid, enz. niet alleen vervelende, maar ook buitengewoon fraaie toepassingen kan maken; Hoofdstuk II, de „constructies en daarmede samenhangende eigenschappen", levert daarbij de stof voor de zuiver planimetrische behandeling der kegelsneden, terwijl de hoofdstukken I en III eenige kennis der Stereometrie vorderen; de stelling van Dandelin in het bijzonder, die de schrijver zeer terecht tot uitgangspunt van zijn beschouwingen kiest, maakt, zooals de ervaring leert, mits goed voorgedragen en aan een duidelijke figuur toegelicht, op daarvoor ontvankelijke jeugdige gemoederen een overweldigenden indruk. Ieder derhalve die zich, zij het aan de Technische Hoogeschool of aan de Universiteit, of waar en hoe dan ook, met Wiskunde bezig houdt, is het aan zich zelf en aan de Mathesis verplicht het boekje van Rutgers door te werken, om daardoor achteraf toch nog te verwerven, wat men hem vroeger wederrechtelijk onthouden heeft; hij moge zich daarbij door de §§ 2 en 3, die over het imaginaire in de Meetkunde handelen, vooral niet laten afschrikken, want deze zijn niet zoo kwaad bedoeld als het wellicht den schijn heeft. In Hoofdstuk V vindt hij dan nog een beknopte, maar alle hoofdzaken bevattende, en bijzonder duidelijk en overzichtelijk geschreven inleiding tot de projectieve

HET CULTUURHISTORISCH ELEMENT IN HET WISKUNDE-ONDERWIJS.

DOOR

Dr. D. J. E. SCHREK.

Die Mathematik ist stets ein grosser Faktor im Kulturleben der Menschheit gewesen; als solcher ist sie dem Schüler in historischem Zusammenhange vorzuführen.

F. Lindemann. Lehren und Lernen in der Mathematik. Rektoratsrede 1904.

Inleiding. Reeds dikwijls is — en niet alleen in ons land — op het betreurenswaardige feit gewezen, dat de verschillende vakken van onderwijs van het leerplan te veel naast elkander staan, zonder dat er van eenige wisselwerking sprake is. Dit toch is, voor zoover ik kan beoordeelen, wel de meest voorkomende toestand en het is mij meermalen gebleken, dat ook de leerlingen dien aldus zien, wat dan ook moeilijk anders kan. Te verklaren is een en ander overigens natuurlijk wel; wij allen leeraren aan middelbare scholen en gymnasia hebben een vakopleiding genoten, want de opleiding aan de Universiteit, die velen onzer ontvangen hebben, was toch dikwijls evenzeer een vakstudie als die voor een middelbare acte. In het bijzonder staan hier de beide groepen, de literair-historische en de exacte vakken, zoo al niet tegenover, dan toch naast elkaar.

Nu is deze toestand zeker ongewenscht. Een gymnasiale- zoowel als een H.B.S.-opleiding behoort toch een harmonische ontwikkeling van den geest te geven, behoort onze cultuur als één geheel te doen zien. En wanneer nu de wiskunde in het bijzonder eenzaam staat te midden der andere leervakken, dan is de oorzaak hiervan m.i. allereerst te zoeken in de wijze, waarop men dit vak gewoonlijk onderwijst. Wanneer men leerlingen, die van een andere school komen, vraagt of ze wel eens van EUCLIDES gehoord

hebben, wanneer ongeveer PYTHAGORAS leefde of PTOLEMAEUS, dan is het antwoord meestal ontkennend. Dat de *s*-formule van HERON afkomstig is, de tiendeelige breuken van STEVIN, het diepere inzicht in het wezen der complexe getallen van GAUSS is al evenzeer onbekend. Men krijgt den indruk, dat aan deze zijde van het vak gewoonlijk zeer weinig aandacht wordt geschonken.

En toch, hoe dikwijls kan men, als men wil, verwijzen naar andere vakken! Naar de vaderlandsche geschiedenis: men denke aan JOHAN DE WITT, JOH. HUDDE en andere magistraten en aan SIMON STEVIN; naar de geschiedenis der kunst, waar we LEONARDO DA VINCI ontmoeten en ALBRECHT DÜRER, wiens „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt" hier weinig bekend schijnt te zijn. In de algemeene geschiedenis treft men D'ALEMBERT aan en MONGE, onder de philosofen PLATO, DESCARTES, LEIBNIZ, om nog niet te spreken van de merkwaardige figuur van BLAISE PASCAL, die toch waarlijk niet alleen als mathematicus groot was.

Inzonderheid moet ik hier nog wijzen op het verband van de wiskunde met de klassieke oudheid, dat met name voor de gymnasia van belang is. In de oudheid toch valt het ontstaan en een reeds vergevorderde ontwikkeling der wiskunde en bij de lectuur der oude schrijvers ontmoet men telkens verwijzingen naar de beoefenaars dier wetenschap en hunne werken. Zoo haalt PLATO meermalen stellingen uit de wiskunde aan en verhaalt ons HERODOTUS van het ontstaan der meetkunde bij de oude Egyptenaren; LIVIUS en andere geschiedschrijvers beschrijven ons de verdediging van Syracuse door ARCHIMEDES, terwijl CICERO ons in de Tusculanae Disputationes vertelt, hoe hij het graf van dienzelfden grooten geleerde nabij Syracuse terugvond. Straks kom ik op dit verband van wiskunde en klassieke oudheid nog uitvoeriger terug.

De kwestie, die ik in dit opstel wil bespreken, heeft indertijd in Duitschland reeds aanleiding gegeven tot het samenstellen van een monographie. In 1912 schreef Dr. MARTIN GEBHARDT in opdracht van de Internationale Mathematische Unterrichtskommission een verhandeling [1]) over dit onderwerp. Ze is, als zooveel van het

---

[1]) M. Gebhardt. Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands. (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Band III, Heft 6). Leipzig. Teubner 1912.

uitstekende werk der I.M.U.K., thans reeds eenigszins verouderd, vooral in de literatuurlijst; ook beperkt ze zich uitsluitend tot Duitschland. Niettemin is het werkje nog steeds zeer lezenswaard.

De geschiedenis der wiskunde als wetenschap en in het onderwijs. Het aantal beoefenaars van de geschiedenis der wiskunde is vrij gering; men vindt ze echter over alle beschaafde landen verspreid en veelal zijn het geleerden van grooten naam, die er zich aan wijden. Als we ons beperken tot de laatste vijftig jaren vinden we in Duitschland vooreerst den bekenden MORITZ CANTOR, maar verder ook mannen als SIGMUND GÜNTHER, A. VON BRAUNMÜHL en JOH. TROPFKE, waarbij uit den tegenwoordigen tijd vooral H. WIELEITNER is te noemen. In Engeland vinden we TH. HEATH, in Amerika D. E. SMITH, terwijl in Frankrijk PAUL TANNERY op den voorgrond trad en in Italië GINO LORIA. Bij ons was D. BIERENS DE HAAN (1822—1895) een der voornaamsten. De Noorsche rijken zijn evenmin achtergebleven: men denke slechts aan H. G. ZEUTHEN en J. L. HEIBERG in Denemarken en vooral aan den Zweed G. ENESTRÖM, die door het uitgeven van de Bibliotheca Mathematica met den ondertitel: „Zeitschrift für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften", de internationale samenwerking leidde. Tengevolge van den wereldoorlog heeft evenwel dit tijdschrift helaas opgehouden te bestaan.

In Duitschland hebben voor het opnemen van de geschiedenis der wiskunde in de leerstof van de school vooral geijverd MAX SIMON [1]), de reeds genoemde SIEGM. GÜNTHER en P. TREUTLEIN. Van den kant der klassiek-literatoren werden deze mathematici krachtig gesteund door U. VON WILAMOWITZ—MOELLENDORFF en MAX C. P. SCHMIDT, over wie straks nog nader zal worden gesproken. Gelukkig begint ook in ons land de belangstelling te ontwaken. „Naarmate ik ouder word", schrijft Prof. Dr. H. DE VRIES in het voorbericht van zijn leerboek der projectieve meetkunde [2]), „ga ik steeds meer het ontzaglijke belang van de Geschiedenis in het algemeen, en dus ook van die der Wetenschap

---

[1]) Vgl. b.v.: Max Simon. Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. München. Beck 1908, bl. 5—6.

[2]) H. de Vries. Beknopt Leerboek der Projectieve Meetkunde. Groningen. Noordhoff 1923.

beseffen", en het werk getuigt dan ook ruimschoots van die belangstelling; immers overal vindt men biographische bijzonderheden ingelascht, terwijl aan een levensschets van JACOB STEINER zelfs een afzonderlijke, vrij uitvoerige paragraaf wordt gewijd. Trouwens ook de vroegere werken van dezen schrijver getuigden van dit sympathieke streven, zij het dan ook misschien in mindere mate.

De geschiedenis der wiskunde in de leerplannen. Het streven om in het schoolonderwijs rekening te houden met de historische ontwikkeling der wiskunde hangt samen met het ontstaan der zoogen. Reformbeweging, die omstreeks 1902 ongeveer gelijktijdig in Frankrijk en Duitschland intrad. Het streven van deze Reformbeweging vond zijn duidelijkste formuleering in het „Meraner Leerplan." Voor hen, die hiermee niet bekend mochten zijn, diene het volgende.

In 1904 stelde de Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte te Breslau een commissie in, de zoogen. „Breslauer Kommission", die een leerplan zou ontwerpen voor het onderwijs in de wis- en natuurkundige vakken volgens de nieuwere opvattingen. Dit ontwerp werd aan de vergadering te Meran (Tirol) in 1905 voorgelegd en wordt daarnaar gewoonlijk het Meraner Leerplan genoemd. Uit de Breslauer Unterrichtskommission, die haar taak hiermee volbracht had, ontstond later (1908) de Deutsche Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (D.A.M.N.U.), die nog heden bestaat en in 1922 het genoemde leerplan aan een herziening onderwierp. Reeds het leerplan van 1905 nu bevat een aanwijzing betreffende het historisch element in het wiskunde-onderwijs; voor de Oberprima (d.i. de hoogste klasse) der gymnasia schrijft het n.l. voor: „Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte." Nog duidelijker drukt het gewijzigde leerplan zich uit: „Die Geschichte der Mathematik ist, wo es angängig erscheint, bei der Entwicklung der Lehraufgaben ebenso wie bei der Aufgabenstellung zu berücksichtigen. Der Zusammenhang mit der allgemeinen Kulturentwicklung ist dabei nach Möglichkeit hervorzukehren" [1]).

[1]) Neue Lehrpläne für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Lehranstalten, nach den Meraner Lehrplänen vom Jahre 1905 neubearbeitet. (Schriften des D.A.M.N.U. II. Folge, Heft 8). Leipzig, Teubner 1922 (bl. 22).